



多状态马尔可夫信道的时延分析

周志强, 叶通, 李东

(上海交通大学区域光纤通信网与新型光通信系统国家重点实验室, 上海 200240)

摘要: 随着无线通信技术的迅速发展, 无线通信为移动用户提供了极大的灵活性和便利性。然而, 由于多径效应引起的慢/快衰落, 无线衰落信道的传输速率是不稳定的, 这种不稳定性影响着信道的传输时延和通信质量。在研究中, 无线衰落信道也被称为马尔可夫信道, 信道状态的切换由马尔可夫链控制。针对一个三状态的马尔可夫信道进行分析。结合数据分组的到达与服务, 整个系统被建模为一个 M/MMSP/1 排队系统。通过定义条件开始服务概率以及条件平均时延, 结合状态转移矩阵, 给出数据分组的平均服务时间和平均等待时间的解析解。最后在极限情况下对数据分组平均等待时间进行讨论, 给出了影响时延的因素。

关键词: 马尔可夫信道; 状态转移矩阵; 服务开始概率; 平均等待时间

中图分类号: TN919

文献标识码: A

doi: 10.11959/j.issn.1000-0801.2016242

Delay analysis of multi-state Markov channels

ZHOU Zhiqiang, YE Tong, LI Dong

State Key Laboratory of Advanced Optical Communication Systems and Networks,
Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China

Abstract: With the rapid development of wireless technology, the wireless communication offers great flexibility and convenience to mobile users. However, due to the slow/fast fading caused by multipath effect, the transmission rate of wireless fading channel is unstable, which will affect the transmission delay and communication quality. In literature, the wireless fading channel is also called Markov channel. The transition of channel state is controlled by a Markov chain. A detailed analysis was given for a three-state Markov channel. The whole system was modeled as an M/MMSP/1 queuing system considering the arrivals and services of packets. By defining conditional start service probability and conditional expected delay, the analytical expressions of mean service time and mean waiting time of packets were given using the state transition matrix. At last, by discussing the mean waiting time in limiting cases, the factors that affect the delay were given.

Key words: Markov channel, state transition matrix, start service probability, mean waiting time

1 引言

随着无线通信技术的飞速发展, 无线通信为移动用户提供了极大的方便和灵活性。然而, 通信环境的多径效应

会导致信道衰落^[1]。无线信道的通信质量难以保持稳定, 而是随着时间的变化而变化, 这种特性会影响信道的传输时延。在设计对时延十分敏感的应用时, 如视频会议、效用计算、VoIP(voice over internet protocol, 网络电话), 如何减小

传输时延非常重要。因此,需要对无线衰落信道进行建模,以便分析影响信道传输时延的因素。

目前,无线衰落信道常用马尔可夫链来建模,因此其也被称为马尔可夫信道。对于马尔可夫信道的研究最早追溯到 Gilbert^[2]和 Elliott^[3]的工作——两状态的马尔可夫信道,信道被假定完全有噪声或者完全没有噪声。然而,当信道传输速率急剧变化时,两状态并不能很好地刻画真实的物理信道。因此,Wang 和 Moayeri^[4]提出了有限状态的马尔可夫信道,并将衰落信道的物理参数对应到有限状态的马尔可夫模型中。通过选择合适的 SNR(signal noise ratio, 信噪比)阈值,信道被划分为多个状态,而相邻状态的切换速率由物理层的电平通过率(level crossing rate)决定。因为参考文献[4]对信道状态的划分和状态数的选择比较随意,参考文献[5]提出了一种改进的 SNR 划分。

由于无线衰落信道由有限状态马尔可夫链建模,称衰落信道的服务是受马尔可夫调制 (Markov modulated service process, MMSP) 的。本文将具有泊松到达、服务受马尔可夫调制以及无限长缓存的队列称为 M/MMSP/1 队列。在传统 M/M/1、M/G/1 队列中,数据分组的服务时间是独立同分布的,但是在 M/MMSP/1 队列中,分组的服务不再彼此独立,这种相关性加大了分析的难度。对于 M/MMSP/1 队列的分析,有传统的生成函数方法^[6-10]和矩阵几何 (matrix-geometric)^[11]方法,但是生成函数方法借助于数值分析而且不能给出解析解,而矩阵几何方法更像是矩阵的代数运算,这两种方法的共同缺点是很少关心数据分组服务时的物理过程,而是从数学的角度分析系统。之后 Mahabhashyam 和 Gautam^[12]提出了服务开始概率的概念,但是只能得到在两种极限状态下服务开始概率的解析解,而对时延的分析,采用了矩阵几何的方法。针对两状态马尔可夫信道,参考文献[13]成功得到了服务开始概率和 P-K 公式,但是其无法一般用到多于两个状态的马尔可夫信道模型中。

本文将研究一个三状态的马尔可夫信道,包含了一个好的状态、一个坏的状态以及在系统崩溃时服务速率为 0 的状态并分析系统的物理特性,如时延、系统稳定条件等。参考文献[14]针对混合 ARQ 系统,对两状态与三状态的马尔可夫信道时延进行了数值比较,但并未给出理论解析解。本文给出了三状态马尔可夫信道服务开始概率和 P-K 公式的解析解,采用离散事件仿真验证理论分析的正确性,并给出影响系统时延因素的分析。

2 三状态马尔可夫信道的 M/MMSP/1 模型

2.1 马尔可夫信道模型

马尔可夫信道表明信道状态的切换被一条连续时间的马尔可夫链所约束,信道状态的切换与数据分组的到达和离去无关。本文中马尔可夫信道具有 3 个状态:状态 0 表示在系统崩溃时信道是完全有噪声的,此时信道传输速率 $\mu_0=0$; 状态 1 表示系统处于坏的状态,此时信道噪声较大,接收端 SNR 较小,假定信道传输速率为 μ_1 ; 状态 2 表示系统处于好的状态,信道噪声较小,SNR 较大,此时传输速率为 $\mu_2(\mu_2>\mu_1)$ 。

因为信道状态切换是一个连续的物理过程,所以信道状态只能切换到相邻的状态中。假定从状态 i 切换到状态 j 的速率为 $f_{ij}(f_{ij}\geq 0)$, 切换速率 f_{ij} 由物理层的电平通过率决定,与最大多普勒频率 f_D 成正比。三状态信道的连续时间马尔可夫链如图 1 所示。

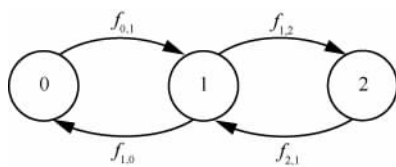


图 1 三状态信道的连续时间马尔可夫链

当系统稳定时,假定概率 π_j 表示任意时刻信道处于状态 j 的概率,此时:

$$\pi Q = 0 \quad (1)$$

其中,行向量 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$, 而矩阵 Q 为连续时间马尔可夫链的无穷小生成元 (infinitesimal generator):

$$Q = \begin{bmatrix} -f_0 & f_{0,1} & 0 \\ f_{1,0} & -f_1 & f_{1,2} \\ 0 & f_{2,1} & -f_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

由于 Q 矩阵每行元素之和为 0, 则 $f_0=f_{0,1}$, $f_1=f_{1,0}+f_{1,2}$, $f_2=f_{2,1}$ 。根据所有概率 $\pi_j(j=0,1,2)$ 之和为 1, 结合式 (1) 可以得到信道处于状态 j 的稳态概率。

2.2 M/MMSP/1 排队模型

考虑数据分组的到达、缓冲以及服务,将无线衰落信道的传输过程建模成 M/MMSP/1 的排队模型。依据经典排队理论符号标记, M 表示数据分组的到达服从泊松过程, 两个数据分组到达时间间隔服从负指数分布, 其参数为 λ ; MMSP 表示信道服从服务过程受马尔可夫调制^[15]; 1 表示单服务台且数据分组的缓冲区是无限长的。此外,假定数

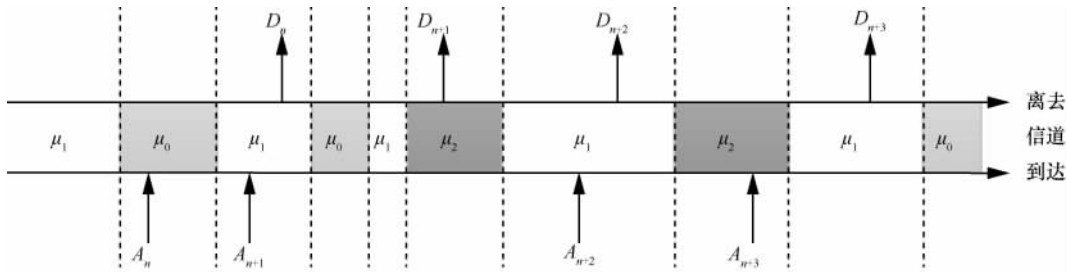


图2 系统的演化过程

据分组的服务遵循 FIFO(first in first out, 先进先出) 准则, 数据分组依据到达顺序被服务台服务。系统的演化过程如图2所示。

对于 M/MMSP/1 排队模型, 信道状态和缓冲区中数据分组的个数是两个对于描述整个系统非常关键的参数。假定在任意时刻 t , $X(t)$ 是缓冲区中数据分组的个数, $Y(t)$ 是当前信道状态。则随机过程 $\{(X(t), Y(t)), t \geq 0\}$ 是一条连续时间马尔可夫链, 其状态空间是 $\{(n, j), n=0, 1, 2, \dots, j=0, 1, \dots, N-1\}$ 。其状态转移如图3所示。

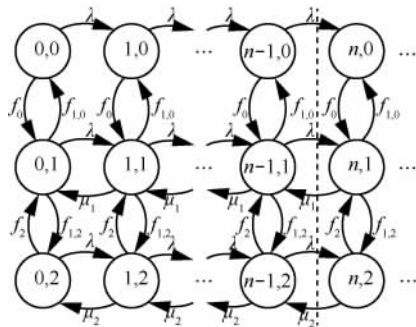


图3 连续时间马尔可夫链状态转移

当系统趋于稳定时, 缓冲区中有 n 个数据分组并且系统状态为 j 的联合稳态概率为:

$$p_{nj} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t)=n, Y(t)=j; n=0, 1, 2, \dots, j=0, 1, 2\} \quad (3)$$

而缓冲区中有 n 个数据分组的边缘稳态概率为:

$$p_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t)=n\} = \sum_{j=0}^2 p_{nj} \quad (4)$$

根据 π_j 和 p_{nj} 的定义, π_j 和 p_{nj} 的关系可以直接得出:

$$\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{Y(t)=j\} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{nj} \quad (5)$$

等系统稳定时, 离开状态 (n, j) 的总速率等于进入状态 (n, j) 的总速率, 根据图3的状态转移情况, 连续时间马尔可夫链的平衡方程如下所示。

(1) $n \geq 1$

$$(\lambda + f_0)p_{n,0} = \lambda p_{n-1,0} + f_{1,0} p_{n,1} \quad (6)$$

$$(\lambda + f_1 + \mu_1)p_{n,1} = \lambda p_{n-1,1} + \mu_1 p_{n+1,1} + f_0 p_{n,0} + f_2 p_{n,2} \quad (7)$$

$$(\lambda + f_2 + \mu_2)p_{n,2} = \lambda p_{n-1,2} + \mu_2 p_{n+1,2} + f_{1,2} p_{n,1} \quad (8)$$

(2) $n=0$

$$(\lambda + f_0)p_{0,0} = f_{1,0} p_{0,1} \quad (9)$$

$$(\lambda + f_1)p_{0,1} = \mu_1 p_{1,1} + f_0 p_{0,0} + f_2 p_{0,2} \quad (10)$$

$$(\lambda + f_2)p_{0,2} = \mu_2 p_{1,2} + f_{1,2} p_{0,1} \quad (11)$$

以信道状态为划分依据, 可以得到部分生成函数

$$G_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{nj} z^n, |z| \leq 1, j=0, 1, 2, \text{ 则总的生成函数 } G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n =$$

$\sum_{j=0}^2 G_j(z)$, 在式(6)~式(8)左右两端乘以 $z^n (n=0, 1, 2, \dots)$ 并依据 n 求和, 结合边界条件式(9)~式(11)可以得到关于 $G_j(z)$ 的线性方程:

$$(\lambda z(1-z) + f_0 z)G_0(z) - z f_{1,0} G_1(z) = 0 \quad (12)$$

$$(\lambda z(1-z) + f_1 z + \mu_1(z-1))G_1(z) - z f_{0,1} G_0(z) - z f_{2,1} G_2(z) = \mu_1 p_{0,1}(z-1) \quad (13)$$

$$(\lambda z(1-z) + f_2 z + \mu_2(z-1))G_2(z) - z f_{1,2} G_1(z) = \mu_2 p_{0,2}(z-1) \quad (14)$$

通过解这组线性方程组, 可以得到部分生成函数 $G_j(z)$ 。此外, 对图3中状态转移中虚线求平衡方程, 从左往右穿过虚线的速率和等于从右往左穿过虚线的速率和, 可以得到:

$$\lambda \sum_{j=0}^2 p_{nj} = \lambda p_n = \sum_{j=0}^2 \mu_j p_{n+1,j} \quad (15)$$

在式(15)对 n 求和, 可以得到:

$$\lambda = \sum_{j=0}^2 \mu_j (\pi_j - p_{0,j}) \quad (16)$$

定义信道容量 $\hat{\mu} = \sum_{j=0}^2 \pi_j \mu_j$, 系统稳定的充分必要条件

就是到达速率 λ 要小于系统容量 $\hat{\mu}$, 否则系统会变得不稳定, 并且随着时间的增长, 缓冲区中的队长会变得无限大。

3 开始服务概率

定义开始服务状态为数据分组开始被服务时马尔可

夫信道的状态,则开始服务概率 $\hat{\pi}_j$ 为数据分组开始服务状态为 j 的概率。这里的 $\hat{\pi}_j$ 与物理量 π_j 是两个不同的概念,前者是对所有数据分组取平均,而后者是对时间取平均。在一些极限条件下, $\hat{\pi}_j$ 的值会趋近于 π_j 。

3.1 状态转移矩阵

由于数据分组的服务时间与信道状态相关,在此定义状态转移矩阵并在后文中利用其求得数据分组开始服务概率与平均等待时间。假定概率 $P\{j|i\}$ 表示某个数据分组在信道状态为 i 时开始服务,在信道状态为 j 时完成服务,由于在状态0时,系统的服务速率为0,因此概率 $P\{0|i\}=0$ ($i=0,1,2$)。状态转移矩阵的定义如下:

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} P\{0|0\} & P\{0|1\} & P\{0|2\} \\ P\{1|0\} & P\{1|1\} & P\{1|2\} \\ P\{2|0\} & P\{2|1\} & P\{2|2\} \end{bmatrix} \quad (17)$$

对开始服务信道状态进行讨论,以概率 $P\{1|1\}$ 为例,当数据分组以状态1开始服务,系统下一个事件可能是以下情况。

(1)数据分组完成服务,信道状态未切换,其时间满足参数为 μ_1 的负指数分布。

(2)数据分组未完成服务,信道切换至状态0,其时间满足参数为 $f_{1,0}$ 的负指数分布。

(3)数据分组未完成服务,信道切换至状态2,其时间满足参数为 $f_{1,2}$ 的负指数分布。

事件(1)发生的概率为 $\mu_1/(\mu_1+f_{1,0}+f_{1,2})=\mu_1/(\mu_1+f_1)$,此时数据分组服务结束且信道状态为1;事件(2)发生的概率为 $f_{1,0}/(\mu_1+f_1)$,此时信道状态切换至0;由于马尔可夫链的无记忆性,数据分组以状态1结束服务的概率为 $P\{1|0\}$;同理,发生事件(3)的概率为 $f_{1,2}/(\mu_1+f_1)$,数据分组以状态1结束服务的概率为 $P\{1|2\}$ 。则 $P\{1|1\}=\mu_1/(\mu_1+f_1)+f_{1,0}/(\mu_1+f_1)P\{1|0\}+f_{1,2}/(\mu_1+f_1)P\{1|2\}$ 。

类似地,式(18)~式(23)给出概率 $P\{j|i\}$ 之间的相互关系:

$$P\{1|0\} = \frac{f_0}{f_0+\mu_0} P\{1|1\} \quad (18)$$

$$P\{2|0\} = \frac{f_0}{f_0+\mu_0} P\{2|1\} \quad (19)$$

$$P\{1|1\} = \frac{\mu_1}{f_1+\mu_1} + \frac{f_{1,0}}{f_1+\mu_1} P\{1|0\} + \frac{f_{1,2}}{f_1+\mu_1} P\{1|2\} \quad (20)$$

$$P\{2|1\} = \frac{f_{1,0}}{f_1+\mu_1} P\{2|0\} + \frac{f_{1,2}}{f_1+\mu_1} P\{2|2\} \quad (21)$$

$$P\{1|2\} = \frac{f_2}{f_2+\mu_2} P\{1|1\} \quad (22)$$

$$P\{2|2\} = \frac{\mu_2}{f_2+\mu_2} + \frac{f_2}{f_2+\mu_2} P\{2|1\} \quad (23)$$

通过解线性方程组式(18)~式(23),可以给出状态转移矩阵 $\hat{Q}$:

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta \left(1 + \frac{f_2}{\mu_2}\right) & \beta \left(1 + \frac{f_2}{\mu_2}\right) & \beta \frac{f_2}{\mu_2} \\ \beta \frac{f_{1,2}}{\mu_1} & \beta \frac{f_{1,2}}{\mu_1} & \beta \left(1 + \frac{f_{1,2}}{\mu_1}\right) \end{bmatrix} \quad (24)$$

其中, $\beta = \mu_1 \mu_2 / (\mu_1 \mu_2 + \mu_1 f_2 + \mu_2 f_{1,2})$,状态转移矩阵给出了服务时相邻数据分组之间的关系,本文将利用状态转移矩阵得到系统中关键的物理参数。

3.2 条件开始服务概率

假定某数据分组到达时见到缓冲区中数据分组的个数为 n , n 包含了正在被服务的数据分组,即HOL(head of line)数据分组。将缓冲区的数据分组依次从0标记到 $n-1$,新到达的数据分组标记为 n ,如图4所示。新到达的数据分组必须等前 n 个服务完成后才能获得服务。如果数据分组到达时,缓冲区为空,那这个数据分组被标记为0并能立即被服务。

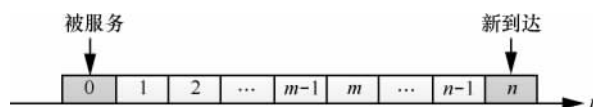


图4 新到达的数据分组见到 n 个数据分组在缓冲区中

针对数据分组的服务过程,定义一类条件概率: $\hat{\pi}_{n,j}(m) = P\{\text{第} m \text{个数据分组开始服务状态为} j | \text{新数据分组到达时在缓冲区中有} n \text{个数据分组}\}$,称为条件开始服务概率。依据定义, $\hat{\pi}_{n,j}(0)$ 即HOL数据分组的条件开始服务概率,而 $\hat{\pi}_{n,j}(n)$ 是新到达数据分组的条件开始服务概率。依据数据分组连续被服务的物理过程可知第 $m-1$ 个数据分组服务结束时的信道状态即第 m 个数据分组的开始服务状态。已知概率 $P\{j|i\}$ 表示一个数据分组以状态 i 开始服务而以状态 j 结束服务,可以建立如下关系:

$$\begin{bmatrix} \hat{\pi}_{n,0}(m) \\ \hat{\pi}_{n,1}(m) \\ \hat{\pi}_{n,2}(m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P\{0|0\} & P\{0|1\} & P\{0|2\} \\ P\{1|0\} & P\{1|1\} & P\{1|2\} \\ P\{2|0\} & P\{2|1\} & P\{2|2\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\pi}_{n,0}(m-1) \\ \hat{\pi}_{n,1}(m-1) \\ \hat{\pi}_{n,2}(m-1) \end{bmatrix} = \hat{Q}^m \begin{bmatrix} \hat{\pi}_{n,0}(0) \\ \hat{\pi}_{n,1}(0) \\ \hat{\pi}_{n,2}(0) \end{bmatrix} \quad (25)$$



因为矩阵 $\hat{Q}$ 具有3个不同的特征根:0、1以及 β ,所以矩阵 $\hat{Q}$ 是可对角化矩阵。对矩阵 $\hat{Q}$ 进行对角化分解,可以得到如下关系:

$$\begin{pmatrix} \hat{\pi}_{n,0}(m) \\ \hat{\pi}_{n,1}(m) \\ \hat{\pi}_{n,2}(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & \eta_1/\eta_2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \eta_2 & \eta_2 & \eta_2 \\ -\eta_2 & -\eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\pi}_{n,0}(0) \\ \hat{\pi}_{n,1}(0) \\ \hat{\pi}_{n,2}(0) \end{pmatrix} \quad (26)$$

其中, $\eta_1 = f_2 \mu_1 / (f_2 \mu_1 + f_{1,2} \mu_2)$, $\eta_2 = f_{1,2} \mu_2 / (f_2 \mu_1 + f_{1,2} \mu_2)$ 。将式(26)展开,可以得知在 $m \geq 1$ 时:

$$\hat{\pi}_{n,0}(m) = 0 \quad (27)$$

$$\hat{\pi}_{n,1}(m) = \eta_1 + \eta_2 \beta^m \hat{\pi}_{n,0}(0) + \eta_2 \beta^m \hat{\pi}_{n,1}(0) - \eta_1 \beta^m \hat{\pi}_{n,2}(0) \quad (28)$$

$$\hat{\pi}_{n,2}(m) = \eta_2 - \eta_2 \beta^m \hat{\pi}_{n,0}(0) - \eta_2 \beta^m \hat{\pi}_{n,1}(0) + \eta_1 \beta^m \hat{\pi}_{n,2}(0) \quad (29)$$

而当 $m=0$ 时, $\hat{\pi}_{n,j}(0)$ 为HOL数据分组的条件开始服务概率,依据马尔可夫链无记忆性,HOL数据分组的开始服务状态可以被当作新数据分组到达时的信道状态。根据PASTA^[16]性质,数据分组到达时看到缓冲区有 n 个数据分组的概率为 p_n ,而同时信道处于状态 j 的概率为 $p_{n,j}$,根据条件概率公式,可以得到初始条件概率为:

$$\hat{\pi}_{n,j}(0) = p_{n,j} / p_n \quad (30)$$

以数据分组到达时候缓冲区中分组的个数 n 作为划分依据,数据分组的开始服务概率与条件开始服务概率的关系如下所示:

$$\hat{\pi}_j = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \hat{\pi}_{n,j}(n) \quad (31)$$

将式(27)~式(29)和初始条件式(30)代入开始服务概率的定义式(31),经过简单代数计算,可是总结出定理1,其给出了开始服务概率的解析解。

定理1 对三状态马尔可夫信道,M/MMSP/1队列中一个数据分组的开始服务概率为:

$$\hat{\pi}_0 = p_{0,0} \quad (32)$$

$$\hat{\pi}_1 = \eta_1 + \eta_2 G_0(\beta) + \eta_2 G_1(\beta) - \eta_1 G_2(\beta) - p_{0,0} \quad (33)$$

$$\hat{\pi}_2 = \eta_2 - \eta_2 G_0(\beta) - \eta_2 G_1(\beta) + \eta_1 G_2(\beta) \quad (34)$$

由于信道在状态0时服务速率为0,因为数据分组以状态0开始服务的唯一情况是数据分组到达时缓冲区为空并且信道状态为0,其概率为 $p_{0,0}$ 。已知数据分组开始服务概率,参考文献[10]给出了数据分组以状态 j 开始服务的条件平均服务时间 $E[T_j]$ 。结合开始服务概率与条件平均

服务时间,以信道状态为划分,对于M/MMSP/1队列可以得到数据分组的平均服务时间 $E[T]$ 为:

$$E[T] = \sum_{j=0}^2 \hat{\pi}_j E[T_j] \quad (35)$$

4 M/MMSP/1 队列的 P-K 公式

平均等待时间是数据分组从进入缓冲区至其开始被服务所经历的时间。在参考文献[11]中,平均等待时间可由HOL数据分组的剩余服务时间和之前所有数据分组服务时间和求得,但是因为其繁琐的运算,这种方法无法推广到多状态马尔可夫信道。在本文中,基于数据分组服务的物理过程,提供了另一种求得平均等待时间的方法,获得三状态马尔可夫信道的P-K公式。

和计算开始服务概率类似,假定数据分组到达时见到缓冲区中数据分组的个数为 n ,并依次标记为0到 n 。新到达的分组在队列中的位置为 n ,随着时间推移,之前的分组陆续被服务并离开缓冲区,则新到达分组的位置不断向前直至变成HOL数据分组。数据分组在缓冲区的位置从 n 变为 $n-1$ 直至为0,因此定义一类物理量 $W_{n,j}(k)$:从在信道状态为 j 时,数据分组在缓冲区中位置变为 $k(0 \leq k \leq n)$ 的时刻到数据分组变成HOL时刻的条件平均时延,则 $W_{n,j}(n)$ 即数据分组的条件平均等待时间,而依据定义, $W_{n,j}(0)$ 的值为0。 $W_{n,j}(k)$ 的示意如图5所示。

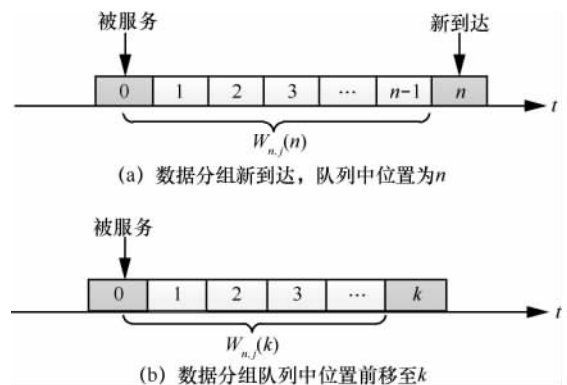


图5 条件平均时延 $W_{n,j}(k)$ 示意

依从数据分组的服务过程,某个数据分组A在缓冲区的位置从 k 变成 $k-1$ 的时间即HOL的服务时间。假定HOL数据分组以状态 i 开始服务并以状态 j 结束服务,则数据分组A成为第 k 个数据分组时信道状态为 i ,成为第 $k-1$ 个数据分组时信道状态为 j 。则条件平均时延 $W_{n,i}(k)$ 和 $W_{n,j}(k-1)$ 的差值为HOL数据分组的服务时间,因为HOL

数据分组以状态 i 开始服务, 则其差值为 $E[T_i]$ 。根据以上物理过程可以得到如下关系:

$$W_{n,i}(k) = \sum_{j=0}^2 P\{j|i\} (W_{n,j}(k-1) + E[T_i]) = E[T_i] + \sum_{i=0}^2 P\{j|i\} W_{n,j}(k-1) \quad (36)$$

写成矩阵形式, 则式(20)变为:

$$\begin{pmatrix} W_{n,0}(k) \\ W_{n,1}(k) \\ W_{n,2}(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P\{0|0\} & P\{1|0\} & P\{2|0\} \\ P\{0|1\} & P\{1|1\} & P\{2|1\} \\ P\{0|2\} & P\{1|2\} & P\{2|2\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{n,0}(k-1) \\ W_{n,1}(k-1) \\ W_{n,2}(k-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E[T_0] \\ E[T_1] \\ E[T_2] \end{pmatrix} \quad (37)$$

代入初始条件 $W_{n,j}(0)=0$, 当 $k \geq 1$ 时:

$$\begin{pmatrix} W_{n,0}(k) \\ W_{n,1}(k) \\ W_{n,2}(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E[T_0] \\ E[T_1] \\ E[T_2] \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{k-1} (\hat{Q}^T)^i \begin{pmatrix} E[T_0] \\ E[T_1] \\ E[T_2] \end{pmatrix} \quad (38)$$

因为矩阵 $\hat{Q}^T$ 与矩阵 $\hat{Q}$ 有相同的特征根, 类似地, 对矩阵 $\hat{Q}^T$ 进行对角化分解, 将式(37)展开:

$$W_{n,0}(k) = \frac{1}{f_0} + \frac{1}{\hat{\mu}} k + \frac{1-\beta^k}{1-\beta} \left(E[T_1] - \frac{1}{\hat{\mu}} \right) \quad (39)$$

$$W_{n,1}(k) = \frac{1}{\hat{\mu}} k + \frac{1-\beta^k}{1-\beta} \left(E[T_1] - \frac{1}{\hat{\mu}} \right) \quad (40)$$

$$W_{n,2}(k) = \frac{1}{\hat{\mu}} k + \frac{1-\beta^k}{1-\beta} \left(E[T_2] - \frac{1}{\hat{\mu}} \right) \quad (41)$$

由于在状态 0 时信道服务速率为 0, 信道需要切换到状态 1 时才能服务, 因而 $W_{n,0}(k)$ 与 $W_{n,1}(k)$ 之差即信道从状态 0 切换到状态 1 的平均时间 $1/f_0$ 。通过对数据分组到达时缓冲区中分组的个数以及信道状态进行划分, 可以得到数据分组平均等待时间 W 与条件平均时延之间的关系。

$$W = \sum_{j=0}^2 \sum_{n=0}^{\infty} W_{n,j}(n) p_{n,j} \quad (42)$$

将初始条件 $W_{n,j}(n)=0$ 、式(39)~式(41)代入平均等待时间式(42), 经过简单计算, 可以总结出定理 2, 其给出了 M/MMSP/1 队列 P-K 公式的解析式。

定理 2 对于三状态马尔可夫信道, M/MMSP/1 队列中一个数据分组平均等待时间的 P-K 公式为:

$$W = \left(\frac{1}{\hat{\mu}} \lambda E[T] + \frac{1}{f_0} (\pi_0 - p_{0,0}) - \frac{1}{f_0} \frac{1}{1-\beta} (\pi_0 - G_0(\beta)) + \frac{1}{1-\beta} \sum_{j=0}^2 (E[T_j] - \frac{1}{\hat{\mu}}) (\pi_j - G_j(\beta)) / (1 - \frac{\lambda}{\hat{\mu}}) \right) \quad (43)$$

将定理 2 中 P-K 公式的 $G_j(\beta)$ 用开始服务概率替换, 可以得到平均等待时间 W 与开始服务概率 $\hat{\pi}_j$ 之间的关

系, 如式(44)所示:

$$W = \left(\frac{1}{\hat{\mu}} \lambda E[T] + \frac{1}{1-\beta} \sum_{j=0}^2 E[T_j] (\pi_j - \hat{\pi}_j) - \frac{\beta}{(1-\beta) \cdot f_0} (\pi_0 - \hat{\pi}_0) / (1 - \frac{\lambda}{\hat{\mu}}) \right) \quad (44)$$

5 极限情况下 M/MMSP/1 队列的性能分析

假定在信道状态 j 的服务速率 μ_j 是恒定的: $\mu_0=0$ 、 $\mu_1=0.5$ 、 $\mu_2=1$, 相邻状态之间的切换速率比值固定: $f_0=4f$ 、 $f_{1,0}=f$ 、 $f_{1,2}=7.5f$ 、 $f_2=2f$ 。如果切换速率 f 非常小, 信道状态切换非常慢, 信道在状态 j 会停留较长的时间; 反之如果切换速率 f 非常大, 在每个数据分组的服务过程中, 信道会快速切换很多次, 信道在状态 j 停留的时间非常短。平均等待时间随信道切换速率变化情况如图 6 所示。

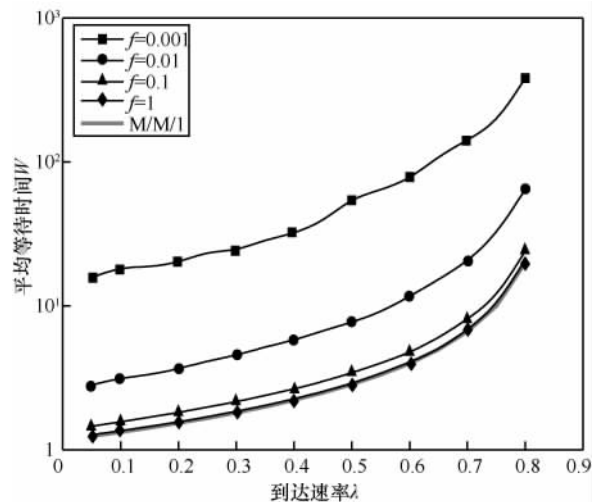


图 6 平均等待时间随信道切换速率变化

(1) f 趋近于 0

此时, 信道状态基本没有切换, 特征值 β 趋近于 1。在这种极限情况下, 对于信道状态 $j=1, 2$, 条件平均时延 $W_{n,j}(n)$ 为:

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} W_{n,j}(n) = \lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\hat{\mu}} - E[T_j]}{1-\beta} (\beta^n - 1) + \frac{1}{\hat{\mu}} n = n E[T_j] \quad (45)$$

因为在状态 j 的停留时间非常长, 假定当新的数据分组到达时信道状态为 j , 则在新数据分组之前的 n 个数据分组的开始服务状态也为 j , 因此数据分组的等待时间即条件服务时间 $E[T_j]$ 乘以缓冲区中数据分组的个数, 如式(43)所示。因此当跳转速率趋近于 0 时, 马尔可夫信道的各个状态可以看作彼此独立, M/MMSP/1 队列可以看作数个 M/M/1 队列的结合。



(2) f 趋近于无穷

此时,信道在相邻状态之间切换非常快,特征值 β 趋近于 0。因为切换速率趋近于无穷,相邻两个数据分组的服务相关性变得很弱,几乎可以忽略不计,因为数据分组的服务可以看作是独立的。此时 M/MMSP/1 可以看作服务速率为 $\hat{\mu}$ 的 M/M/1 队列。图 6 中 M/M/1 曲线即固定服务速率和到达速率时,数据分组平均等待时间的下界。

从图 6 可以看出,随着信道切换速率的增加,数据分组的平均等待时间会降低。对于无线通信而言,通信时延会减少,从而通信质量会更好。而信道切换速率与最大多普勒频率 f_0 成正比,因此提高最大多普勒频率能提高信道切换速率从而降低时延。

6 结束语

对三状态马尔可夫信道进行分析,建立了 M/MMSP/1 排队模型。依据数据分组服务开始时和结束服务时信道状态定义了状态转移矩阵,随后通过建立物理量条件开始服务概率、条件平均时延与状态转移矩阵之间的联系,给出了数据分组开始服务概率与平均等待时间的解析解。最后,通过对数据分组平均等待时间的分析,发现信道切换速率越快,平均等待时间越小。因此相应提高最大多普勒频率能有效降低无线通信信道的传输时延,有助于对时延敏感应用的设计,如视频会议、效用计算、VoIP 等,减少图像和语音的传输时间,提升应用的性能和用户体验。

参考文献:

- [1] JAKES W C, COX D C. Microwave mobile communication[M]. New York: Wiley-IEEE Press, 1994.
- [2] GILBERT E N. Capacity of a burst-noise channel[J]. Bell System Technical Journal, 1960, 39(5): 1253-1265.
- [3] ELLIOTT E O. Estimates of error rates for codes on burst-noise channels [J]. Bell System Technical Journal, 1963, 42 (5): 1977-1997.
- [4] WANG H S, MOAYERI N. Finite-state Markov channel-a useful model for radio communication channels [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 1995, 44(1): 163-171.
- [5] ZHANG Q, KASSAM S A. Finite-state Markov model for Rayleigh fading channels [J]. IEEE Transactions on Communications, 1999, 47(11): 1688-1692.
- [6] EISEN M, TAINTER M. Stochastic variations in queueing processes[J]. Operations Research, 1963, 11(6): 922-927.
- [7] YECHIALI U, NAOR P. Queueing problems with heterogeneous arrivals and service[J]. Operations Research, 1971, 19(3): 722-734.

- [8] YECHIALI U. A queueing-type birth-and-death process defined on a continuous-time Markov chain[J]. Operations Research, 1973, 21(2): 604-609.
- [9] MEHMETI F, SPYROPOULOS T. Performance analysis of "on-the-spot" mobile data offloading [C]//2013 IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM), December 9 -13, 2013, Atlanta, USA. New Jersey: IEEE Press, 2013: 1577-1583.
- [10] MEHMETI F, SPYROPOULOS T. Is it worth to be patient analysis and optimization of delayed mobile data offloading[C]// IEEE INFOCOM 2014-IEEE Conference on Computer Communications, April 27-May 2, 2014, Toronto, Canada. New Jersey: IEEE Press, 2014: 2364-2372.
- [11] NEUTS M F. Matrix-geometric solutions in stochastic models: an algorithmic approach[M]. North Chelmsford: Courier Corporation, 1981.
- [12] MAHABHASHYAM S R, GAUTAM N. On queues with Markov modulated service rates [J]. Queueing Systems, 2005, 51 (1-2): 89-113.
- [13] HUANG L, LEE T T. Generalized pollaczek-khinchin formula for Markov channels[J]. IEEE Transactions on Communications, 2013, 61(8): 3530-3540.
- [14] GUNASEELAN N, LIU L, CHAMBERLAND J F, et al. Performance analysis of wireless hybrid-ARQ systems with delay-sensitive traffic [J]. IEEE Transactions on Communications, 2010, 58(4): 1262-1272.
- [15] 刘建明, 王瑞, 张良, 等. Markov 调制服务时间的单服务台排队近似分析[J]. 计算机仿真, 2010(1): 119-123.
LIU J M, WANG R, ZHANG L, et al. An approximate analysis for the single server queue with Markov-modulated service time[J]. Computer Simulation, 2010(1): 119-123.
- [16] WOLFF R W. Poisson arrivals see time averages[J]. Operations Research, 1982, 30(2): 223-231.

[作者简介]



周志强(1993-),男,上海交通大学硕士生,主要研究方向为无线局域网、排队论。

叶通(1976-),男,上海交通大学副教授,主要研究方向为宽带交换网络结构、网络算法设计和性能分析、光网络系统。

李东(1948-),男,上海交通大学致远讲席教授,IEEE Fellow, HKIE Fellow,1993-2010 年于香港中文大学任讲席教授,主要研究方向为带宽交换理论、网络性能分析、无线通信网络。